

Programma di Matematica

Classe V Q

a.s. 2022/2023

Liceo Vittoria Colonna

Prof. Simone De Gregori

Libri di testo:

Matematica.blu 2.0 con Tutor Volume 4 e 5 – Bergamini, Barozzi, Trifone – ed. Zanichelli

UNITA' 1 – INTRODUZIONE ALL'ANALISI

Teoria:

- Richiami sulla definizione di funzione
- Dominio naturale delle principali funzioni dell'analisi (razionali intere e fratte, irrazionali, logaritmiche, esponenziali, goniometriche)
- Studio del segno di una funzione
- Funzioni suriettive, iniettive e biettive
- Definizione di funzione crescente/decrescente strettamente e in senso lato
- Definizione di funzione pari/dispari
- Definizione di funzione periodica
- Composizione di due funzioni
- Definizione di funzione inversa di una funzione, invertibilità di una funzione e proprietà della funzione inversa
- Richiami sui grafici delle principali funzioni (logaritmiche, esponenziali, goniometriche) e loro trasformazioni nel piano (traslazioni e simmetrie)

Esercizi:

- Ricerca e rappresentazione del dominio e dello studio del segno di una funzione
- Riconoscere funzioni pari e dispari
- Calcolo della funzione inversa
- Determinazione di funzioni composte

UNITA' 2 – LIMITI DI FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

Teoria:

- Concetto di intorno di un punto, intorno destro e sinistro
- Definizione di punto di accumulazione e di punto isolato
- Definizione di $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ (limite finito per x che tende ad un valore finito)
- Limite destro e limite sinistro
- Definizione di $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$ (limite infinito per x che tende ad un valore finito)
- Definizione di asintoto verticale
- Definizione di $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = l$ (limite finito per x che tende ad infinito)
- Definizione di asintoto orizzontale e obliquo
- Definizione di $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$ (limite infinito per x che tende ad infinito)
- Teorema di unicità del limite (con dimostrazione)
- Teorema del confronto (con dimostrazione)
- Teorema della permanenza del segno (con dimostrazione) e teorema inverso
- Limiti delle funzioni elementari: potenza, radice, esponenziali, logaritmiche, goniometriche
- Calcolo di limiti che non presentano forme indeterminate

- Algebra dei limiti e operazioni con infinito
- Forme indeterminate e loro risoluzione
- Limiti notevoli (con dimostrazione):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$$

- Calcolo di limiti mediante confronto tra infiniti: teorema di gerarchia tra gli infiniti

Esercizi:

- Scrivere la definizione generale di un limite
- Semplici esercizi di verifica del limite
- Calcolo di limiti che non presentano forme indeterminate
- Calcolo di limiti che presentano forme indeterminate
- Calcolo di limiti mediante i limiti notevoli
- Calcolo di limiti mediante il confronto tra infiniti
- Esercizi sui limiti con parametri da determinare

UNITA' 3 – CONTINUITA'

Teoria:

- Definizione di funzione continua in un punto
- Classificazione dei punti di discontinuità: prima, seconda e terza specie
- Teorema di esistenza degli zeri e applicazioni
- Metodo di bisezione
- Teorema di Weierstrass
- Teorema dei valori intermedi
- Ricerca degli asintoti di una funzione e grafico probabile

Esercizi:

- Studio della continuità e dei punti di discontinuità di una funzione
- Esercizi sulla continuità con parametri
- Applicazione del teorema di esistenza degli zeri a particolari equazioni
- Determinazione di soluzioni approssimate di equazioni mediante il metodo di bisezione
- Studio di una funzione e grafico probabile

UNITA' 4 – LA DERIVATA

Teoria:

- Definizione di derivata di una funzione in un punto e significato geometrico
- Funzione derivata
- Teorema di legame tra continuità e derivabilità in un punto (con dimostrazione)
- Derivata delle funzioni elementari
- Teoremi sull'algebra delle derivate: linearità della derivata, prodotto, quoziente, reciproco, inversa, funzioni composte (con dimostrazione)
- Applicazioni geometriche: retta tangente alla funzione in un punto, tangenza tra due funzioni
- Applicazioni alla fisica (spazio, velocità istantanea e accelerazione istantanea) e in generale alle scienze

- Classificazione dei punti di non derivabilità: punto angoloso, cuspide e flesso a tangente verticale
- Differenziale di una funzione (cenni)

Esercizi:

- Calcolo della derivata mediante la definizione
- Calcolo di derivate mediante le formule di derivazione
- Calcolo di rette tangente ad una funzione passanti per un punto appartenente alla funzione stessa, oppure esterno ad essa
- Esercizi sulla tangenza fra funzioni
- Problemi di applicazione della derivata nelle scienze
- Studio della continuità e derivabilità di una funzione con e senza parametri

UNITA' 6 – TEOREMI SULLE FUNZIONI DERIVABILI – STUDIO DI FUNZIONE

Teoria:

- Teorema di Rolle e suo significato geometrico (con dimostrazione)
- Teorema di Lagrange e suo significato geometrico (con dimostrazione)
- Teorema di Cauchy (con dimostrazione)
- Teorema di de l'Hospital (con dimostrazione)
- Definizione di punto di massimo/minimo relativo e assoluto
- Teorema di Fermat (con dimostrazione) e punti stazionari
- Primo e secondo corollario del teorema di Lagrange
- Criterio per la determinazione di massimi e minimi relativi attraverso lo studio della derivata prima
- Definizione di funzione convessa/concava
- Criterio di concavità e convessità per le funzioni derivabili
- Definizione di punto di flesso
- Condizione necessaria per un punto di flesso e criterio di determinazione dei flessi attraverso la derivata seconda
- Grafici deducibili: grafico della derivata prima a partire dal grafico di una funzione

Esercizi

- Ricerca di massimi/minimi/flessi di una funzione
- Studio completo di una funzione e suo grafico
- Applicazione dei teoremi sulle funzioni continue e derivabili
- Problemi di massimo e minimo
- Risoluzione di equazioni parametriche attraverso l'analisi

UNITA' 7 – L'INTEGRALE INDEFINITO

Teoria:

- Definizione di primitiva di una funzione e sue proprietà
- Definizione e proprietà dell'integrali indefinito
- Risoluzione di integrali immediati attraverso le formule di derivazione anche di funzioni composte
- Metodo di integrazione di funzioni razionali fratte: caso denominatore di grado due (studio del delta), caso denominatore di grado minore del numeratore, caso denominatore di grado maggiore di due (esempi particolari)
- Formula dell'integrazione per parti
- Metodo di sostituzione

Esercizi

- Calcolo di primitive di una funzione

UNITA' 8 – L'INTEGRALE DEFINITO

Teoria:

- Definizione secondo Riemann
- Interpretazione geometrica dell'integrale definito
- Proprietà dell'integrale definito
- Teorema di Torricelli-Barrow (con dimostrazione)
- Definizione e proprietà della funzione integrale
- Calcolo di aree e volumi di rotazione
- Calcolo di volumi con il metodo delle sezioni
- Teorema del valore medio per gli integrali (con dimostrazione)
- Integrazione impropria
- Applicazione dell'integrale definito alla fisica
- Integrazione numerica: metodo dei rettangoli con calcolo dell'errore

Esercizi:

- Calcolo di integrali definiti
- Calcolo di aree e volumi
- Calcolo del valor medio di una funzione in un intervallo
- Esercizi sulla funzione integrale

UNITA' 9 – LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Teoria:

- Definizione di equazione differenziale
- Integrale generale e particolare di un'equazione differenziale
- Equazioni differenziali lineari del primo ordine: integrale generale
- Equazioni differenziali a variabili separabili e sua risoluzione
- Definizione di problema di Cauchy

Esercizi:

- Risoluzione di equazioni differenziali del primo ordine e semplici problemi di Cauchy
- Verificare la soluzione di un'equazione differenziale

Roma, 15/05/2023

Il Docente

Prof. Simone De Gregori

